

## TRASMISSIONE A INGRANAGGI

### 1) PROPORZIONAMENTO MODULARE

#### Caratteri geometrici delle ruote

Si chiede di dimensionare un ingranaggio, inteso come coppia di ruote dentate che ingranano fra loro. Sono noti la potenza,  $W$ , e il rapporto di trasmissione  $\tau$  fra le ruote.

Il fattore principale sul quale si basa la geometria di una ruota dentata è il modulo,  $m$ , definito come rapporto fra il diametro primitivo e il numero di denti:

$$m = \frac{D_p}{z} \quad (1.)$$

Il modulo è legato al passo (distanza fra due fianchi omologhi) dalla relazione

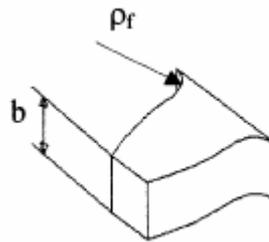
$$p = \pi m \quad (\text{UNI 6773}) \quad (2.)$$

Oltre ai fattori propri della dentatura, quali l'addendum, il dedendum, ecc., vi sono altre dimensioni macroscopiche della ruota legate al modulo:

§ la larghezza della dentatura,  $b$ , in direzione assiale:

$$b = \gamma m \quad (3.)$$

in cui  $\gamma$  è un fattore tabulato che dipende dalla qualità di lavorazione della dentatura.



§ il raccordo alla base del dente, con la circonferenza di troncatura interna:

$$\rho_f = 0,2 \cdot m \quad (4.)$$

Fra le dimensioni caratteristiche di un ingranaggio si definisce anche il rapporto di ingranaggio, che è l'inverso del rapporto di trasmissione:

$$u = \frac{1}{\tau}$$

Qualità della dentatura e condizioni di lavoro	$\gamma$
Dentatura fusa precisa oppure tagliata alla fiamma; pignone con supporti esterni non rigidi	6 ... 10
Dentatura non rettificata, temprata	5 ... 15
Dentatura lavorata bene, supporti nello stesso carter del ruotismo rigidi e ben allineati	10 ... 20
Dentatura lavorata di precisione, $n_1 \leq 3000 \text{ min}^{-1}$	20 ... 40
Superficie dei denti pressoché perfetta, elevata precisione di dentatura, supporti rigidi, $n_1 \geq 3000 \text{ min}^{-1}$	40 ... 80

Condizione affinché due ruote dentate a proporzionamento modulare possano ingranare, è che abbiano modulo uguale.

I denti vengono creati da una macchina (creatore) per mezzo di un utensile detto dentiera, a forma di pettine, contro cui la ruota viene fatta avanzare assialmente e messa in rotazione in modo sincrono in modo che si asporti la quantità di materiale adeguata a creare un profilo ad evolvente.

Se il proporzionamento non è corretto, si hanno errori, fra cui il sottotaglio, per effetto del quale la punta del creatore asporta il materiale alla base del dente.

Un altro fenomeno è l'interferenza, in cui la punta di un dente ingranando tocca il raccordo di base della dentatura dell'altra ruota.

Si dimostra per via geometrica che il sottotaglio si evita se il numero di denti è superiore a un valore minimo, definito dalla relazione

$$z_{\min} = \frac{2 \cdot h_a}{m \cdot \sin^2(\alpha)}$$

In particolare, per ruote a proporzionamento modulare, con angolo di pressione di  $20^\circ$ , si trova:

$$z_{\min} = \frac{2}{\sin^2(\alpha)} \cong 17 \quad (5.)$$

Se il numero di denti della ruota condotta è un multiplo di quello della motrice, un dente del pignone ingrana sempre con gli stessi denti della ruota; eventuali imperfezioni della costruzione gravano sempre negli stessi punti, determinando un più rapido deterioramento delle condizioni di lavoro.

Una soluzione è fare in modo che il numero di denti della ruota e del pignone siano primi fra loro, ad esempio aumentando o diminuendo di 1 il numero di denti della ruota.

### Continuità dell'ingranamento

L'ingranamento ha luogo, per una coppia di denti, sulla retta di pressione, che è tangente comune alle due circonferenze di base, e passa per il punto di tangenza fra le due primitive.

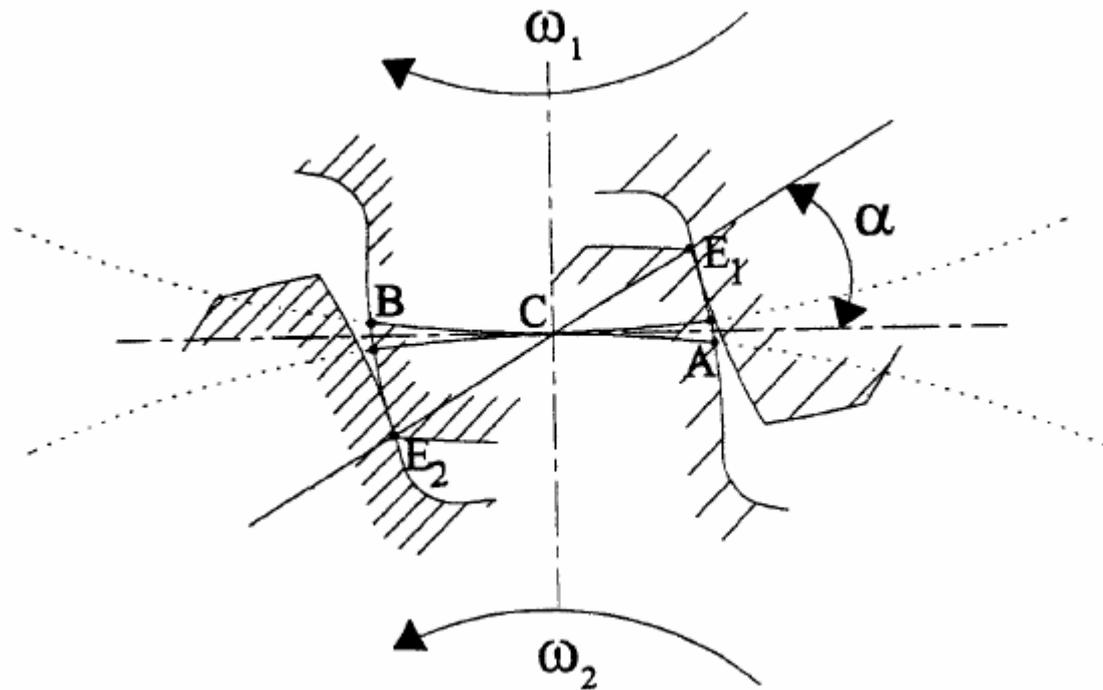


Figura 1 - Ingranamento.

Basandosi sullo schema geometrico della trasmissione si individuano:

- E1 intersezione fra la retta di pressione e la circonferenza di testa o di troncatura esterna della ruota condotta.
- E2 intersezione fra la retta di pressione e la circonferenza di testa o di troncatura esterna della ruota motrice.
- E1E2 g è la linea di condotta, misurata lungo la retta delle pressioni.

Sulle circonferenze primitive,

AC  $e_1$  arco di accesso misurato sulla circonferenza primitiva della condotta.

CB  $e_2$  arco di recesso misurato sulla circonferenza primitiva della motrice.

La somma dei due archi forma l'arco di condotta,

$$e = e_1 + e_2.$$

Per avere un buon ingranamento, che non provochi sobbalzi, vibrazioni, urti, è necessario che al termine del contatto fra due denti coniugati, sia già iniziato il contatto fra i denti successivi; questo significa che l'arco di condotta deve essere maggiore del passo della dentatura:

$$e > p$$

In una ruota dentata, la distanza fra due fianchi consecutivi di evolvente, misurata lungo la retta di azione si chiama passo base:

$$p_b = p \cos(\alpha)$$

Generalmente, per misurare la “bontà” dell’ingranamento in questi termini, ci si riferisce a una grandezza chiamata rapporto di condotta,  $\varepsilon_\alpha$ ;

$$\varepsilon_\alpha = \frac{g}{p_b} > 1 \quad (6.)$$

La linea di condotta si può misurare secondo la formula

$$g = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - a \cdot \sin(\alpha)$$

in cui

$a=r_1+r_2$ , somma dei raggi primitivi delle ruote.

Sostituendo ai raggi di troncatura esterna e di base si sostituiscono le relazioni in funzione del modulo  $m$ , si trova

$$g = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{(mz_1 + 2m)^2 - (mz_1 \cos(\alpha))^2} + \sqrt{(mz_2 + 2m)^2 - (mz_2 \cos(\alpha))^2} - m(z_1 + z_2) \cdot \sin(\alpha) \right]$$

$$g = \frac{1}{2} m \left[ \sqrt{(z_1 + 2)^2 - (z_1 \cos(\alpha))^2} + \sqrt{(z_2 + 2)^2 - (z_2 \cos(\alpha))^2} - (z_1 + z_2) \cdot \sin(\alpha) \right] \quad (7.)$$

e anche

$$p_b = \pi m \cos(\alpha) \quad (8.)$$

Si ricava quindi:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\frac{1}{2} \left[ \sqrt{(z_1 + 2)^2 - (z_1 \cos(\alpha))^2} + \sqrt{(z_2 + 2)^2 - (z_2 \cos(\alpha))^2} - (z_1 + z_2) \cdot \sin(\alpha) \right]}{\pi \cos(\alpha)} \quad (9.)$$

da cui si nota che il rapporto di condotta non dipende dal modulo, ma solo dal numero dei denti: è perciò possibile determinarlo anche in fase di dimensionamento.

### **Dimensionamento a usura (Teoria di Hertz)**

Il fenomeno principale di danneggiamento delle dentature è l’usura, che ne provoca il progressivo deterioramento, per effetto dello strisciamento fra i denti.

La teoria di Hertz stabilisce le condizioni di cimento di due cilindri che sono tenuti a contatto per mezzo di una forza  $F$ .

Le ipotesi su cui si basa sono:

1. il materiale dei cilindri sia omogeneo e isotropo;
2. si trovi in condizioni di comportamento elastico lineare;
3. mancanza di attrito;
4. forza uniformemente distribuita lungo la dimensione assiale dei cilindri, in modo che le pressioni di contatto abbiano lo stesso andamento in ogni sezione perpendicolare all’asse dei cilindri.

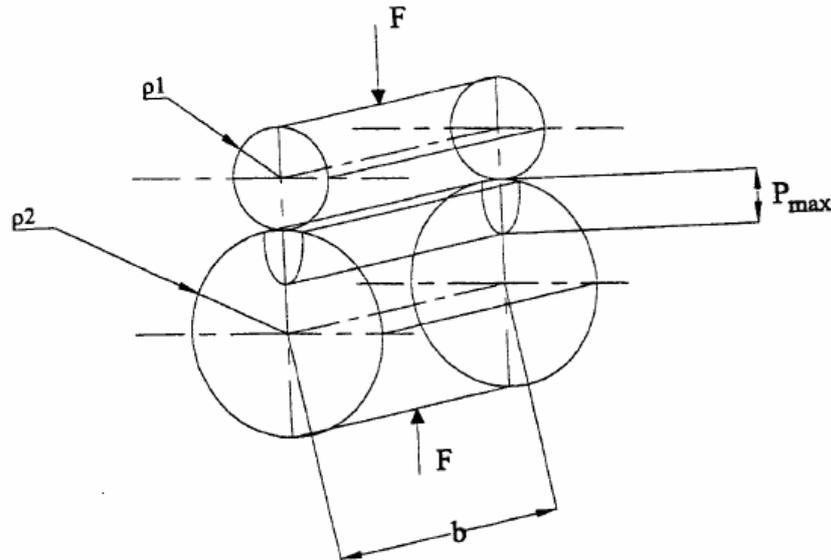


Figura 2 - Pressioni di contatto secondo Hertz.

L'area di contatto si estende attorno alla generatrice teorica di contatto, e assume forma rettangolare. È possibile dimostrare che il profilo di pressione ha forma semiellittica, e il massimo vale

$$p_{\max}^2 = \frac{1}{\pi \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)} \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \frac{F}{b} \quad (10.)$$

La norma prescrive che si esegua il calcolo nel punto di contatto primitivo, correggendolo con opportuni coefficienti per tenere conto delle reali condizioni di funzionamento dell'ingranaggio.

I raggi di curvatura dei profili dei denti a contatto sono pari ai raggi dei cerchi osculatori dell'evolvente, dati da:

$$\rho = r \sin(\alpha)$$

F è la forza diretta secondo la retta binormale, che vale:

$$F_{bn} = \frac{F_t}{\cos(\alpha)}$$

Per la teoria di Hertz, dalla relazione (10.) si ha:

$$\sigma_{p,\max} = p_{\max} = \sqrt{\frac{1}{\pi \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)}} \sqrt{\left( \frac{1}{r_1 \sin(\alpha)} + \frac{1}{r_2 \sin(\alpha)} \right)} \sqrt{\frac{F_{bn}}{b}} \quad (11.)$$

Poiché  $\frac{1}{r_1} = \frac{2}{d_1}$ , possiamo scrivere:

$$\sigma_{p,\max} = p_{\max} = \sqrt{\frac{1}{\pi \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)}} \sqrt{\frac{2}{\sin(\alpha) \cos(\alpha)}} \sqrt{\left( \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right)} \sqrt{\frac{F_t}{b}} \quad (12.)$$

Si ricavano da questo i coefficienti che determinano le condizioni di funzionamento:

$$Z_E = \sqrt{\frac{1}{\pi \left( \frac{1-v_1^2}{E_1} + \frac{1-v_2^2}{E_2} \right)}} \quad \text{fattore di elasticità} \quad (13.)$$

che dati i fattori del materiale (acciaio), vale circa 189,812.

$$Z_H = \sqrt{\frac{2}{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}} \quad \text{fattore di zona} \quad (14.)$$

che per la geometria "classica" con angolo di pressione di 20° vale 2,495.

Infine, per tenere conto delle reali condizioni di ingranamento, si introducono una serie di coefficienti correttivi:

$$\sigma_H = Z_\varepsilon \sqrt{K_A K_V} \sigma_{p,\max} \quad (15.)$$

in cui

$$Z_\varepsilon = \sqrt{\frac{4-\varepsilon_\alpha}{3}} \quad \text{fattore del rapporto di condotta} \quad (16.)$$

$K_A$  fattore di applicazione del carico per tenere conto dei sovraccarichi esterni;

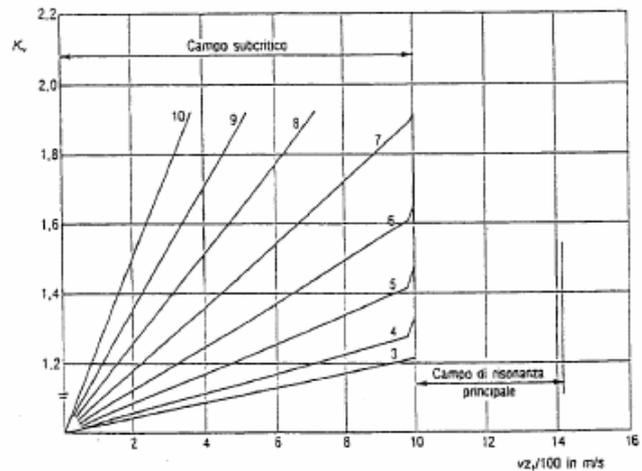
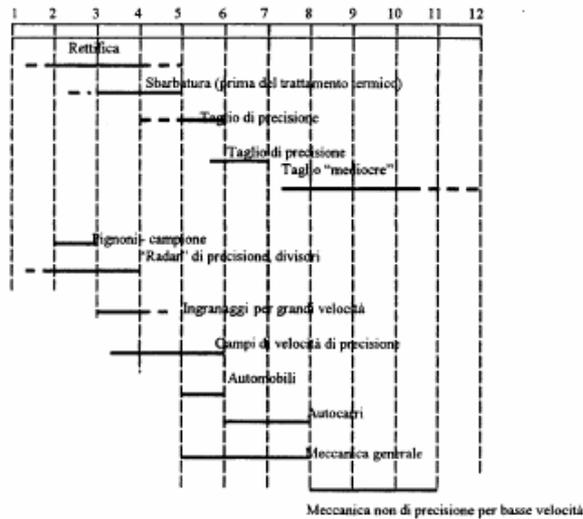
**Tabella 1 - Fattori di servizio  $K_A$ .**

Caratteristiche di funzionamento del motore	Caratteristiche di funzionamento della macchina azionata		
	Uniforme	Sovraccarichi leggeri	Sovraccarichi Forti
Valori orientativi di $K_A$ * •			
Uniforme	1,0	1,25	1,75
Sovraccarichi leggeri	1,25	1,5	2,0 o più
Sovraccarichi forti	1,5	1,75	2,25 o più
* I valori indicati non sono validi per ingranaggi funzionanti a velocità prossime alle velocità di risonanza			
• Per ingranaggi moltiplicatori, moltiplicare i valori indicati per 1,1.			

$K_V$  fattore dinamico che dipende dalla qualità di lavorazione delle ruote dentate, e dalla velocità periferica della circonferenza primitiva.

Poiché  $K_V$  dipende dalla velocità, è legato anche al modulo; il procedimento di calcolo perciò deve essere iterativo, perché il modulo è la grandezza che dobbiamo determinare.

In base alla lavorazione cui sono sottoposte le ruote, e quindi secondo la precisione con cui sono costruite, si risale alla "classe di precisione"; si entra poi nella seconda tabella, individuando, in funzione della precisione e della velocità periferica, il parametro cercato.



Velocità (m/s)	Procedimento di lavorazione
0 ..... 0,8	Fusione, taglio alla fiamma, sgrossatura
0,8 ..... 4	Lavorazione accurata ad asportazione di truciolo
4 ..... 12	Lavorazione come sopra, molto accurata e retifica normale
12 ..... 60	Retifica di precisione, rasatura dentature oblique

Figura 3 - Coefficiente di velocità  $K_V$ .

Si ottiene:

$$\sigma_H = Z_\varepsilon \sqrt{K_A K_V} Z_E Z_H \sqrt{\frac{F_t}{b} \left( \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right)} \quad (17.)$$

in cui sostituendo le relazioni geometriche dei diametri primitivi e della larghezza di dentatura si ottiene:

$$\sigma_H = Z_\varepsilon \sqrt{K_A K_V} Z_E Z_H \sqrt{\frac{2M_t}{mz_1} \frac{1}{\gamma m} \left( \frac{1}{mz_1} + \frac{1}{mz_2} \right)} \quad (18.)$$

introducendo il rapporto di ingranaggio,  $u$ , definito prima, si ha:

$$\sigma_H = Z_\varepsilon \sqrt{K_A K_V} Z_E Z_H \sqrt{\frac{2M_t}{\gamma m^3 z_1^2} \left( \frac{1+u}{u} \right)} \quad (19.)$$

Il valore di sforzo puntuale individuato si confronta con un valore di confronto che la norma definisce come:

$$\sigma_{HP} = \frac{\sigma_{Hlim}}{S_{Hmin}} Z_W Z_L Z_R Z_X Z_V Z_N \quad (20.)$$

in cui:

$Z_W$  è il fattore di rapporto fra le durezza, che vale  $1,2 - \frac{HB - 130}{1700}$

Questo è vero solo se la durezza è superiore a 130 e inferiore a 400; evidentemente si usa solo per la ruota costruita di materiale più tenero. Se la durezza Brinell non è compresa fra questi valori, il fattore  $Z_W$  vale 1.

$Z_L$  è il fattore di lubrificazione, ottenuto dal diagramma riportato;

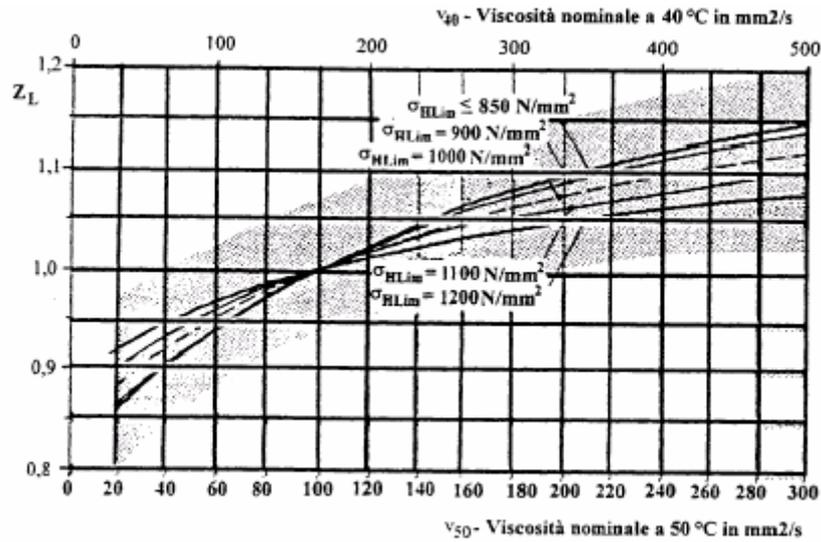


Figura 4 - Fattore di lubrificazione  $Z_L$ .

$Z_R$  è il fattore di rugosità che è diagrammato secondo la rugosità totale media della dentatura;  $R_{tm100}$  è il valore medio della rugosità fra ruota e pignone all'interasse 100, con espressione

$$R_{tm100} = \frac{R_{tm1} + R_{tm2}}{2} \sqrt[3]{\frac{100}{a}} \tag{21.}$$

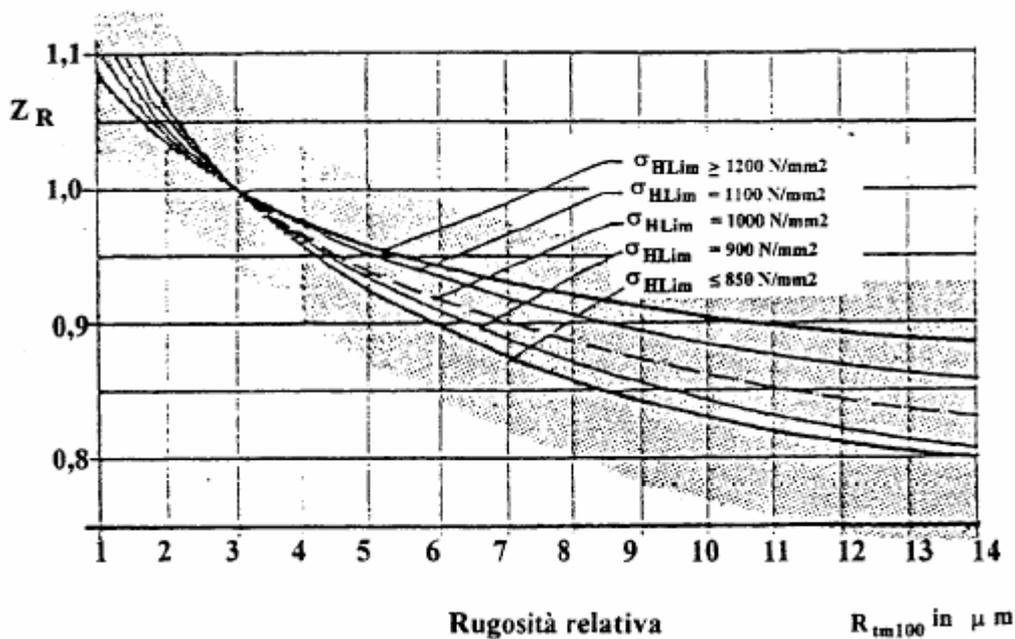


Figura 5 - Fattore di rugosità  $Z_R$ .

$Z_X$  fattore dimensionale, che dipende dal materiale della ruota: si pone = 1 se la ruota è di acciaio trattato termicamente in modo corretto.

$Z_V$  fattore di velocità, diagrammato, che richiede un comportamento iterativo come il precedente fattore  $K_V$ .

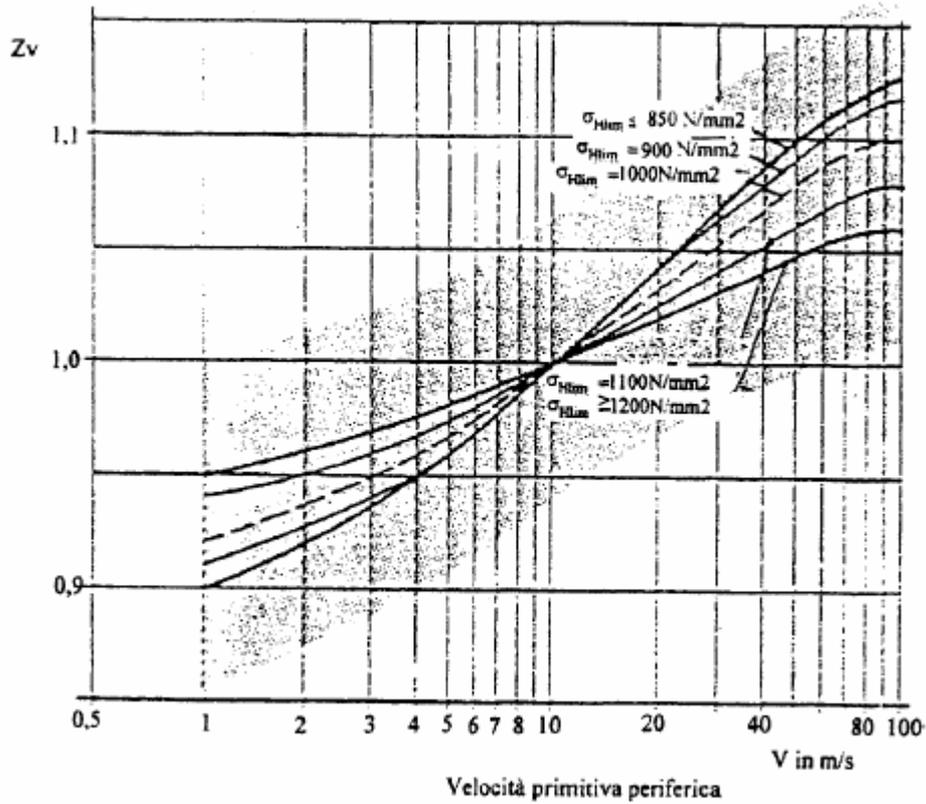


Figura 6 - Fattore di velocità  $Z_v$ .

$Z_N$

fattore di durata che è diverso da 1 solo se si richiede la durata “a termine” dell’ingranaggio

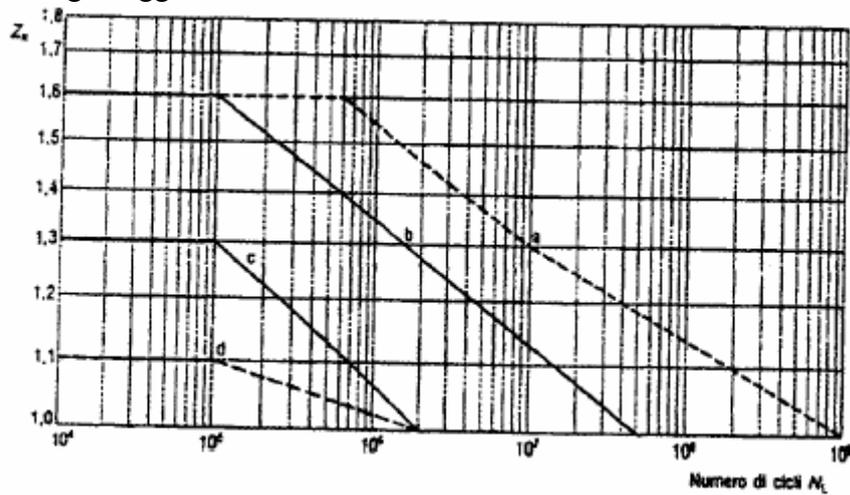


Figura 7 - Fattore di durata  $Z_N$ .

$\sigma_{Hlim}$  pressione limite di fatica superficiale, tabulata secondo il materiale

Tabella 2 - Sforzi limite.

Materiale	Durezza superficiale	$\sigma_{Hlim}$ N/mm <sup>2</sup>	$\sigma_{Flim}$ - N/mm <sup>2</sup>
Acciaio non legato di base	HB = 150	480	205
	HB = 200	550	200
Acciai in getti	HB = 150	415	170
Ghisa grigia	HB = 190	410	90
	HB = 230	460	100
Ghisa a grafite sferoidale	HB = 200	560	215
	HB = 250	630	230
Acciaio al carbonio bonificato	HB = 150	560	240
	HB = 200	600	255
Acciaio legato bonificato	HRC 25 - 30	800	320
	HB 253 - 286	850	335
Acciaio bonificato con tempra superficiale (temprato ad induzione o alla fiamma)	HRC = 50	1320	375
	HRC = 55	1370	415**
Acciaio legato cementato •	HRC = 58 + 62	1650	525
Acciaio bonificato nitrurato	HV1 = 700 ÷ 850	1450 ••	470

\* Per tensione alterna (per esempio ruote oziose) assumere il 70% dei valori indicati. Per senso di rotazione reversibile, apportare una riduzione di minor entità.  
 \*\* Valori validi per indurimenti estesi al piede del dente. Nel caso in cui l'indurimento è limitato ai fianchi del dente, il valore di  $\sigma_{Flim}$  è generalmente minore di quello dell'acciaio bonificato base e a volte nettamente minore.  
 • Valori validi per spessori efficaci di indurimento da 0,15 a 0,20  $m_n$  al termine delle lavorazioni.  
 •• Valore valido (eccetto per gli acciai all'alluminio) per nitrurazione gassosa prolungata o per un adeguato spessore di indurimento (da 0,4 fino a 0,6 mm per  $m_n$  da 2 a 5 mm) e per ingranaggi con interasse modesto.

$S_{Hmin}$  coefficiente di sicurezza.

Il procedimento deve essere iterativo:

innanzitutto, dovendo imporre una dimensione iniziale della ruota, si sceglierà un modulo di primo tentativo, sul quale si condurranno tutte le considerazioni.

Si ricava la forza tangenziale, il diametro primitivo, la velocità periferica; sulla base di questi, si individuano i fattori  $K_v$  e  $Z_v$ .

Si deve, dopo avere individuato tutti i coefficienti, valutare la disuguaglianza

$$Z_\epsilon \sqrt{K_A K_V} Z_E Z_H \sqrt{\frac{2M_t}{\gamma m^3 Z_1^2} \left( \frac{1+u}{u} \right)} \leq \frac{\sigma_{Hlim}}{S_{Hmin}} Z_W Z_L Z_R Z_X Z_V Z_N, \quad (22.)$$

da cui:

$$m \geq \sqrt[3]{\frac{2M_t(1+u)}{\gamma z_1^2 u} K_A K_V \left( \frac{Z_\epsilon Z_E Z_H S_{Hmin}}{\sigma_{Hlim} Z_W Z_L Z_R Z_X Z_V Z_N} \right)^2} \quad (23.)$$

il valore del modulo così ottenuto dovrà essere arrotondato al valore normalizzato più prossimo per eccesso; se tale valore non concorda con l'ipotesi formulata in precedenza, si dovrà procedere scegliendo un nuovo valore, dalla iterando il calcolo sul nuovo valore trovato, fino alla convergenza definitiva.

## Verifica a fatica

Sebbene sia l'usura la più frequente causa di messa fuori servizio per un ingranaggio, un pericolo consistente è la rottura per fatica del dente; si esegue generalmente ad usura il dimensionamento (ad eccezione di pochi casi, in cui ad esempio si debbano trasmettere momenti considerevoli), e di seguito si verifica a fatica la dentatura.

Il dente di una ruota è sottoposto a sforzo pulsante dallo zero: la forza rimane sempre sulla retta delle pressioni, mentre il punto di contatto si sposta lungo tale retta.

Tuttavia, benché la direzione e il verso della forza normale al dente (che si identifica con  $F_{bn}$ ) rimangano costanti, il dente stesso si sposta rispetto alla retta su cui essa agisce, e determina una variazione dell'angolo di incidenza, che porta a modificare le componenti della forza in direzione parallela e perpendicolare all'asse del dente.

Non è sempre corretto affermare che il valore della forza che sollecita un singolo dente rimanga costante: infatti, in genere all'inizio e alla fine dell'ingranamento vi sono più coppie di denti in presa, fra cui si ripartisce la forza  $F_{bn}$ ; è corretto pensare che all'inizio e alla fine dell'ingranamento, una singola coppia di denti regga circa metà della forza complessiva, che invece la sollecita per intero durante la parte centrale del ciclo di ingranamento.

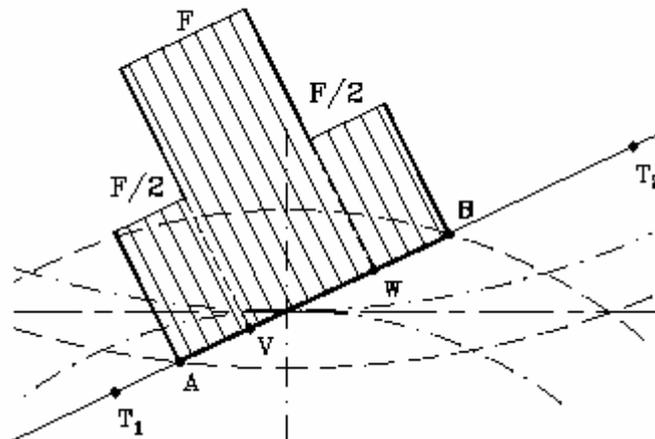


Figura 8 - Ripartizione di forza fra i denti durante l'ingranamento:

A - inizio del contatto; V - inizio del contatto singolo; W - fine del contatto singolo; B - fine del contatto.

Occorre determinare la condizione di carico più gravosa, e del punto maggiormente sollecitato del dente.

Innanzitutto, si nota che il dente è sollecitato a pressoflessione; considerando solo lo sforzo di flessione, la condizione peggiore si verifica quando è massimo il prodotto della forza per il suo braccio rispetto alla base del dente.

Per un dente della ruota condotta, ciò accade quando il punto di contatto si trova nel punto V della figura sopra: la forza è massima, ed è grande anche il braccio rispetto alla base (ricordiamo che il punto di contatto si avvicina progressivamente alla base del dente della condotta durante l'ingranamento). Questo punto è denominato *punto di contatto singolo più esterno della condotta* e dista un passo base ( $p_b$ ) lungo la retta delle pressioni dal punto di inizio ingranamento.

Per un dente della motrice, simmetricamente, la condizione di maggior carico si verifica quando la forza massima agisce in prossimità dell'apice del dente, al punto W della figura sopra; esso si definisce *punto di contatto singolo più esterno della motrice* e dista un passo base dal termine dell'ingranamento.

È in verità piuttosto difficile individuare con precisione i punti di contatto singolo; perciò la normativa prescrive che si esegua la verifica ai punti di contatto più esterno (E1 ed E2, o anche A e B nella figura 1) aggiungendo un coefficiente correttivo che consideri la reale dinamica dell'ingranamento.

Una volta trovate le condizioni di carico peggiori, si devono trovare le sollecitazioni agenti; descriviamo il procedimento per la condotta, ricordando che il metodo duale dovrà applicarsi alla motrice.

Il dente è rappresentabile come una mensola soggetta a pressoflessione; la forza trasmessa è pari a

$$F_{bn} = \frac{F_t}{\cos(\alpha)}$$

Per individuare la sezione più caricata, si devono superare due difficoltà: innanzitutto, non è noto l'angolo  $\alpha_{en}$  che la retta delle pressioni forma con la normale all'asse del dente; (nel caso la verifica si compia secondo la norma UNI 8862, l'angolo è diverso e si indica con  $\alpha_{an}$ ).

Per determinarlo, si deve procedere per via grafica, tracciando i profili delle dentature della motrice e della condotta, e disponendoli nella configurazione di contatto singolo più esterno rispettivamente per la condotta e per la motrice; sarà quindi possibile misurare l'angolo formato fra il dente e la retta delle pressioni.

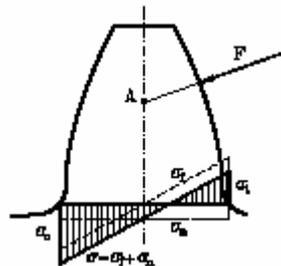
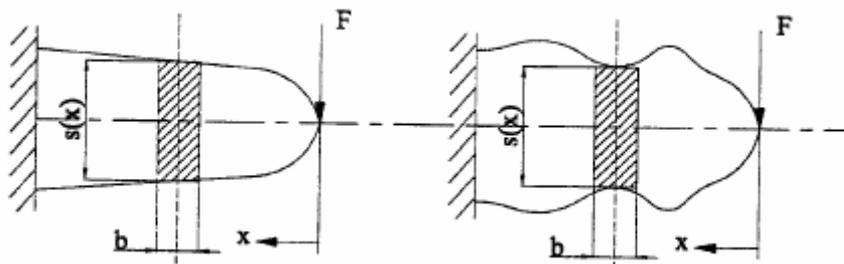


Figura 9 - Sforzi alla base del dente, di compressione e trazione.

Il secondo problema, riguarda invece l'individuazione della sezione più sollecitata, a causa della variabilità della sezione del dente.

Si ricorre al concetto di **solido a uniforme resistenza**: è così indicato un corpo che, per determinate condizioni di vincolo e di carichi, presenti la stessa sollecitazione massima in ogni sezione perpendicolare al proprio asse.

Dato che il dente equivale a una mensola incastrata, si vuole determinare il solido che, incastrato alla base e soggetto a flessione, presenti sforzo massimo costante in tutte le sezioni normali all'asse.



Sia  $x$  una coordinata assiale dal vertice alla base del solido, e  $s(x)$  la funzione che ne descrive il profilo esterno; nota la forza  $F$  che la sollecita a flessione e la larghezza (costante)  $b$  del solido, lo sforzo massimo in una sezione generica vale

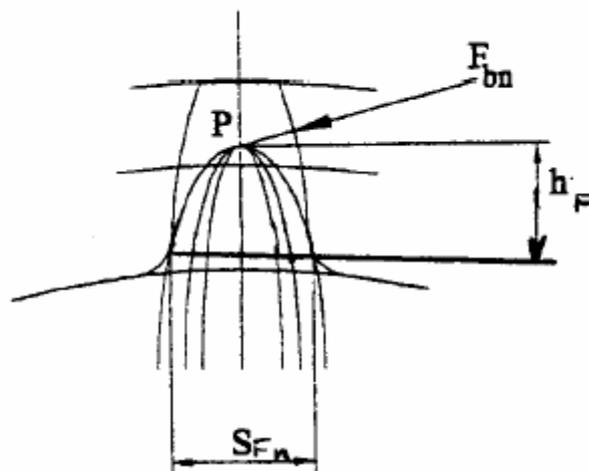
$$\sigma_{\max} = \frac{M_f}{W_f} = \frac{F \cdot x}{\frac{1}{6} b \cdot s(x)^2} = \text{costante.}$$

Si ricava:

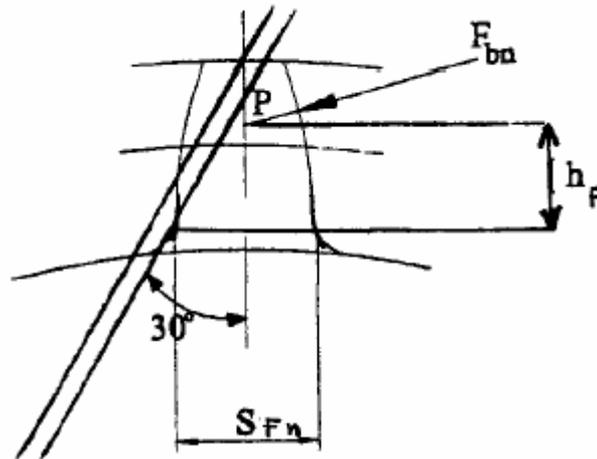
$$s(x) \propto \sqrt{x}$$

per cui il profilo del solido a uniforme resistenza incastrato e sollecitato a flessione è una parabola.

Per trovare la sezione più sollecitata del dente si considera una famiglia di parabole, il cui vertice sia nel punto di intersezione fra l'asse del dente e la retta delle pressioni; quella tangente alla base del dente ha, per definizione, lo stesso sforzo del dente stesso sul profilo, ed essendo la più grande, ha anche lo sforzo massimo. La tangenza identifica perciò la sezione resistente (che indichiamo con  $s_{Fn}$ ) e il braccio della forza ( $h_F$ ) come si vede in figura.



un metodo alternativo per superare le difficoltà di tracciamento delle parabole, previsto dalla normativa, consiste nel tracciare una famiglia di rette inclinate di  $30^\circ$  rispetto all'asse del dente, spostandole in direzione parallela all'asse stesso fino a risultare tangenti al profilo del dente. In questo caso le rette non devono necessariamente passare per l'intersezione con la retta delle pressioni, ma si identifica egualmente la sezione resistente della base.



Il dente è sollecitato da uno sforzo di compressione e uno di trazione, provocato dalla flessione con entità:

$$\sigma_N = \frac{F_{bn} \sin(\alpha_{en})}{b \cdot S_{Fn}}, \text{ e } \sigma_{f, \max} = \frac{F_{bn} \cos(\alpha_{en}) h_F}{\frac{1}{6} b \cdot S_{Fn}^2}.$$

Si vede, analizzando l'entità degli sforzi, che quelli di compressione sono sempre superiori in modulo a quelli di trazione; entrambi sono inoltre pulsanti dallo zero, per effetto dell'ingranamento. Tracciando il diagramma di Haigh, si vede però che, benché inferiori in modulo, gli sforzi di trazione sono più prossimi alla condizione limite.

Sarebbe possibile condurre in questo modo la verifica a fatica per il dente con il metodo usuale, considerando solo il carico di trazione, più pericoloso; si deve tenere presente che il diagramma di Haigh in questo caso non va tracciato dopo aver determinato il limite di resistenza a fatica  $\sigma'_{FAF}$ , ma utilizzando parametri appositi, determinati per mezzo di esperimenti su ruote dentate.

La normativa stabilisce invece che si effettui il calcolo secondo un metodo alternativo, che delega all'utilizzo di numerosi coefficienti correttivi l'analisi delle problematiche illustrate sopra.

In sostanza si deve verificare la disuguaglianza:

$$\sigma_F < \sigma_{FP}$$

in cui

$\sigma_F$  è lo sforzo equivalente che agisce alla base del dente, definito da:

$$\sigma_F = \frac{F_t}{b \cdot m} Y_{Fa} Y_{Sa} Y_{\epsilon} K_A K_V.$$

$F_t$  Forza tangenziale trasmessa dall'ingranaggio  
 $b$  larghezza della dentatura  
 $m$  modulo della dentatura

e i coefficienti correttivi sono definiti come segue:

$Y_{Fa}$  è il fattore di forma, che dipende essenzialmente dalla geometria.

Partendo dallo sforzo flessionale agente si ha:

$$\sigma_f = \frac{F_{bn} \cdot \cos(\alpha_{en}) \cdot h_F}{\frac{1}{6} b \cdot s_{Fn}^2} = \frac{F_t}{\cos(\alpha)} \frac{6 \cos(\alpha_{en}) h_F}{b \cdot s_{Fn}^2}$$

dividendo ambo i membri per  $m^2$  si ottiene:

$$\sigma_f = \frac{F_t}{bm} \frac{6 \cos(\alpha_{en}) \frac{h_F}{m}}{\cos(\alpha) \left( \frac{s_{Fn}}{m} \right)^2}$$

da cui

$$Y_{Fa} = \frac{6 \cos(\alpha_{en}) \frac{h_F}{m}}{\cos(\alpha) \left( \frac{s_{Fn}}{m} \right)^2}$$

$Y_{Sa}$  è il fattore di correzione delle tensioni, che equivale nella pratica al coefficiente di sovrasollecitazione teorico  $K_t$ .

Esso dipende solo dalla geometria della zona di attacco del dente alla ruota, per mezzo della formula:

$$Y_{Sa} = (1,2 + 0,13 \cdot L) q_s^{\frac{1}{(1,21 + \frac{2,3}{L})}}$$

in cui:

$$L = \frac{s_{Fn}}{h_F}; \quad q_s = \frac{s_{Fn}}{2\rho_F} \quad \text{dove } \rho_F \text{ è il raccordo alla base del dente, pari a } 0,2 \cdot m.$$

$Y_\varepsilon$  è il fattore di ricoprimento,; esso tiene conto del fatto che le condizioni di massima sollecitazione non si hanno quando la forza agisce in testa al dente ma quando il dente è al punto di contatto singolo più esterno.  $Y_\varepsilon$  vale 1 nel caso si svolga la verifica nel punto di contatto singolo più esterno, inclinata dell'angolo  $\alpha_{en}$ ; nel caso in cui invece si consideri la forza al punto di contatto più esterno, inclinata dell'angolo  $\alpha_{an}$ , secondo la normativa, vale:

$$Y_\varepsilon = 0,25 + \frac{0,75}{\varepsilon_\alpha}, \quad \text{in cui ovviamente } \varepsilon_\alpha \text{ è il rapporto di condotta definito sopra.}$$

$K_A$  è il fattore di servizio, già visto in precedenza;

$K_V$  è il fattore di velocità, anch'esso già visto.

La tensione ammissibile, parimenti, dipende da:

$$\sigma_{FP} = \frac{\sigma_{Flim}}{S_{Fmin}} Y_{\delta_{relT}} Y_{R_{relT}} Y_X Y_{ST} Y_{NT}$$

in cui:

$\sigma_{Flim}$  è lo sforzo limite di fatica, tabulato.

$S_{Fmin}$  è il coefficiente di sicurezza.

$Y_{\delta rel T}$  è il coefficiente relativo di sensibilità all'intaglio, che si ottiene dalla relazione:

$$Y_{\delta rel T} = \frac{1 + \sqrt{0,2 \cdot (1 + 2q_s)} \rho'}{1 + \sqrt{1,2} \rho'}$$

dove  $q_s$  è stato definito sopra, mentre  $\rho'$  è tabulato in funzione del materiale:

Tabella 3 - Valori di  $\rho'$  secondo il materiale.

Materiale		Coefficient e $\rho'$
Ghisa grigia con carico di rottura a trazione $R_m$ , in N/mm <sup>2</sup> , di	150	0.3124
	300	0.3095
Acciaio nitrurato		0.1005
Acciaio a basso tenore di carbonio, acciaio non legato di base, acciaio per getti, con carico unitario di snervamento superiore $R_{eH}$ , in N/mm <sup>2</sup> , di	300	0.0833
	400	0.0445
	500	0.0281
Acciaio bonificato e ghisa sferoidale, con carico unitario di scostamento della proporzionalità $R_{p0,2}$ , in N/mm <sup>2</sup> , di	600	0.0194
	800	0.0064
	1000	0.0014
Acciaio cementato		0.0030

$Y_{R rel T}$  è il coefficiente relativo di rugosità superficiale, diagrammato o ricavabile con apposite formule dipendenti dal materiale di cui sono costituite le ruote.

È detto "relativo" perché vale 1 se la rugosità è la stessa delle ruote sperimentali su cui si sono svolte le prove.

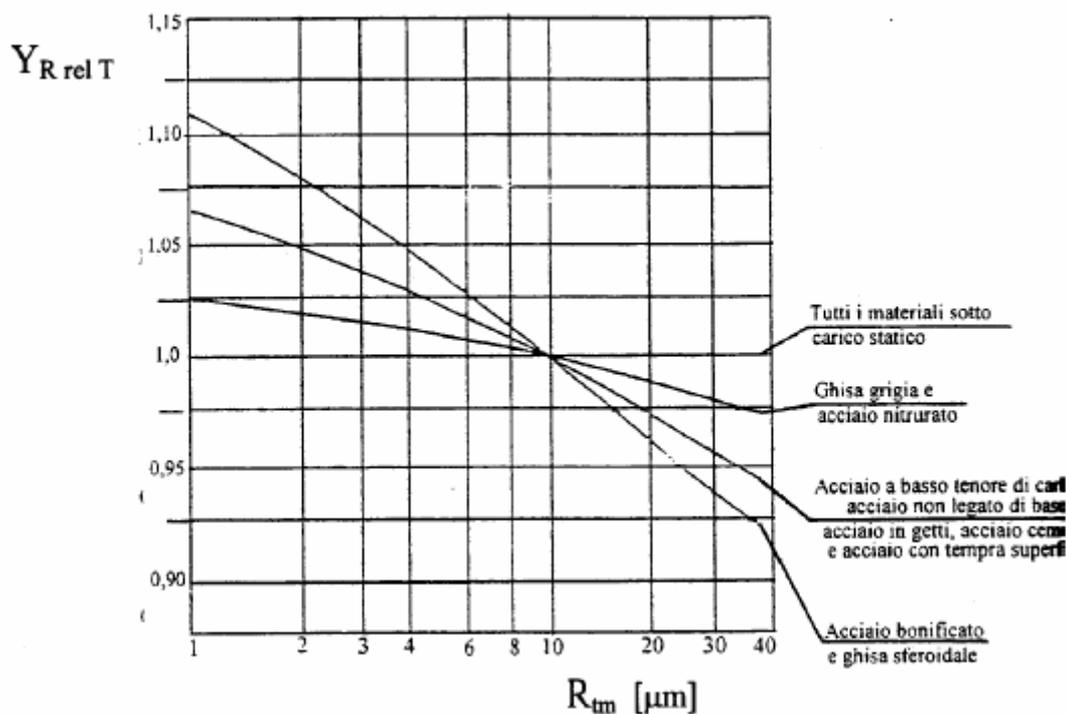
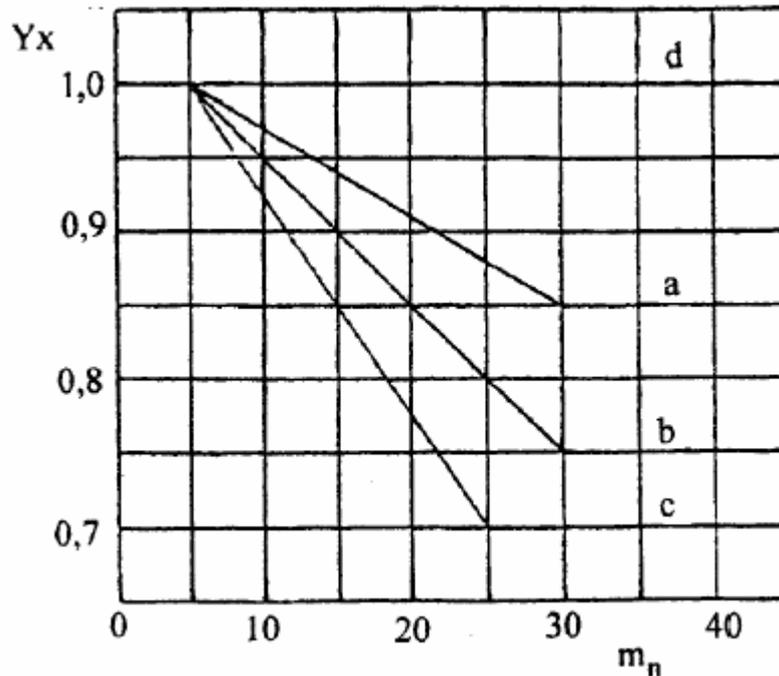


Figura 10 - Coefficiente relativo di rugosità  $Y_{R rel T}$ .

$Y_X$  coefficiente dimensionale, che tiene conto dell'effetto delle dimensioni del dente sulla resistenza a fatica; vale 1 per modulo = 5.



**Figura 11 - Coefficiente dimensionale  $Y_X$ ; a) acciaio bonificato, ac. non legato di base e ghisa sferoidale temprata; b) acciaio indurito in superficie; c) ghisa grigia; d) altri materiali sotto carico statico**

$Y_{ST}$  coefficiente di correzione delle tensioni assoluto. Vale 2; è utilizzato perché le tabelle normative forniscono i valori di sollecitazione limite in termini di ampiezza, mentre si eseguono i calcoli considerandone il valore massimo (cioè, il doppio).

$Y_{NT}$  coefficiente di durata; valuta la maggiore resistenza del materiale nel caso che il numero di cicli sia inferiore di 3.000.000, che è il valore sul quale si determina il limite di fatica.

Una volta determinati tutti i coefficienti, si deve verificare che la disequazione:

$$\sigma_F = \frac{F_t}{b \cdot m} Y_{Fa} Y_{Sa} Y_e K_A K_V < \frac{\sigma_{Flim}}{S_{Fmin}} Y_{\delta relT} Y_{RrelT} Y_X Y_{ST} Y_{NT} = \sigma_{FP}$$

sia soddisfatta, per avere la certezza che la dentatura sia in grado di resistere a fatica.

**Appendice: tabella dei moduli normalizzati per ruote dentate.**

<b>TABELLA MODULI NORMALIZZATI</b>		
<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>
1	-	-
-	1,125	-
1,25	-	-
-	1,375	-
1,50	-	-
-	1,75	-
2	-	-
-	2,25	-
2,50	-	-
-	2,75	-
3	-	-
-	-	(3,25)
-	3,50	-
-	-	(3,75)
4	-	-
-	4,50	-
5	-	-
-	5,50	-
6	-	-
-	-	(6,50)
-	7	-
8	-	-
-	9	-
10	-	-
-	11	-
12	-	-
-	14	-
16	-	-
-	18	-
20	-	-
20	-	-
Note: Accordare la preferenza ai moduli della colonna A. Evitare l'uso dei tre moduli della colonna C.		

Appendice: geometria del dente e tracciamento dell'evolvente.

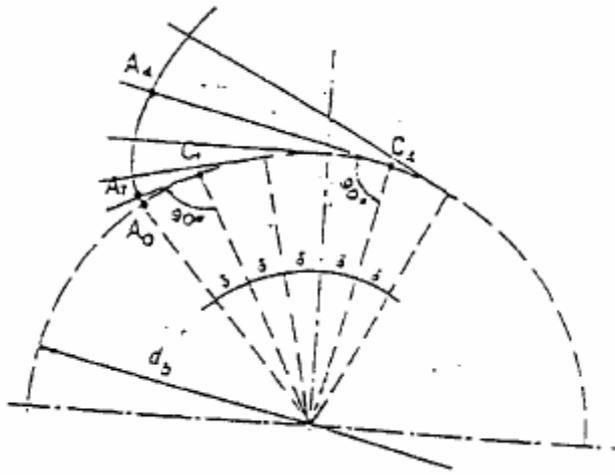


Figura 12 – Tracciamento dell'evolvente.

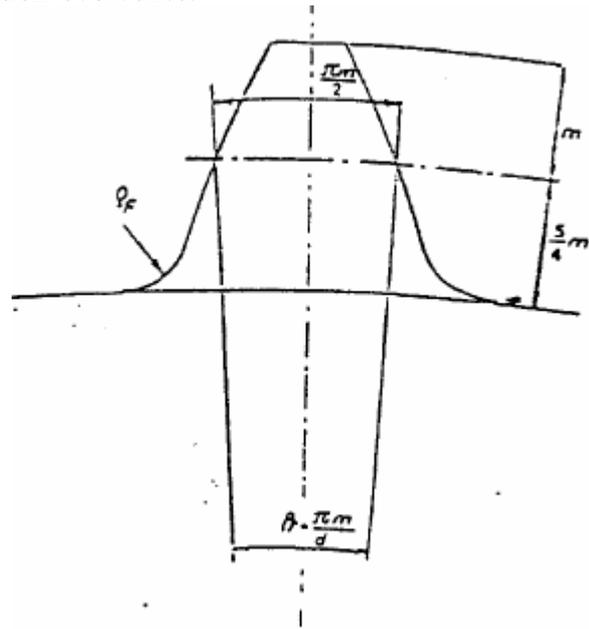


Figura 13 – Dimensioni del dente.

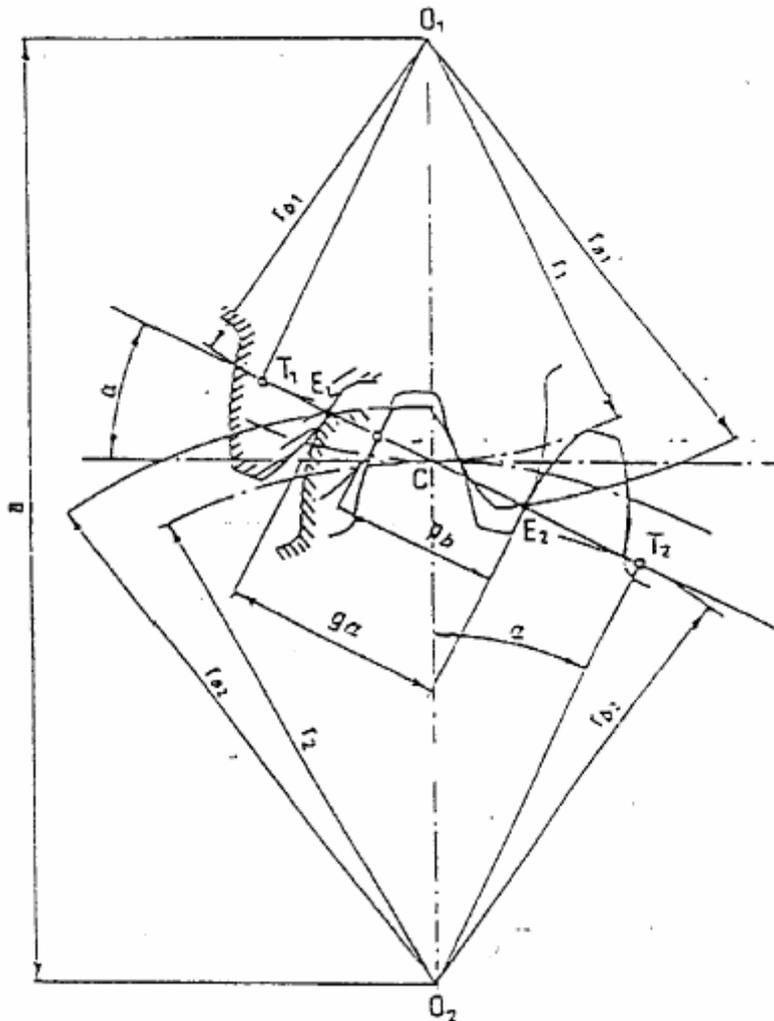


Figura 14 – Ingranamento e ricopertura.