TRASMISSIONE AD INGRANAGGI

Università degli Studi di Bergamo
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Prof. Sergio Baragetti

GEOMETRIA DELLE RUOTE DENTATE

La geometria delle ruote dentate si fonda sul modulo, m, dato da $m = \frac{D_p}{z}$

Dal modulo dipendono tutte le grandezze geometriche, e in particolare il passo, l'addendum e il dedendum. Vi sono inoltre :

- La larghezza della dentatura **b =** γ **m** con γ tabulato.
- Il raccordo alla base del dente, ρ_f **= 0,2 m**

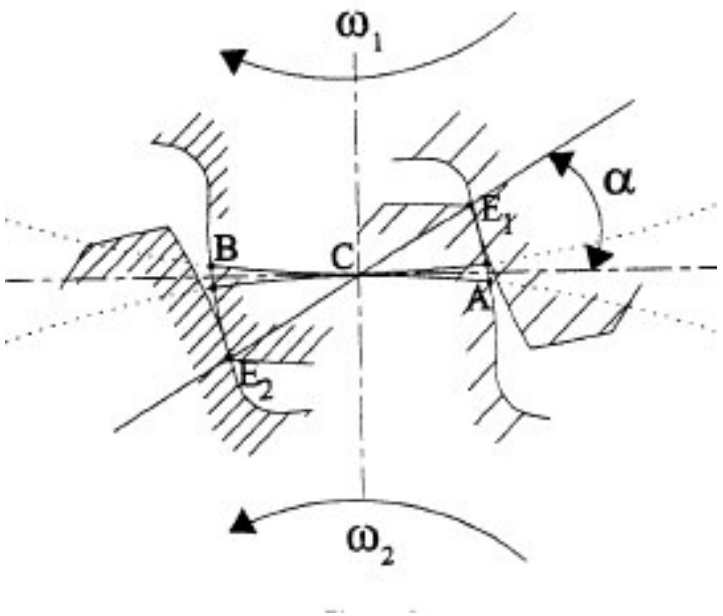
Per costruire correttamente la dentatura, il numero di denti di una ruota normale deve essere superiore a un valore minimo che è definito dalla formula:

$$z_{min} = \frac{2}{sen^2(\alpha)} \cong 17$$

Se $\alpha = 20°$.

CONTINUITÀ DELL'INGRANAMENTO

Vogliamo un funzionamento senza urti dell'ingranaggio:



Definiamo:

- g linea di condotta, pari a E1E2
- e arco di condotta, misurato sulle circonferenze primitive
- p_b passo base misurato lungo la retta di azione

Si vuole che sia e> p_b riferendosi a un parametro detto **rapporto di condotta** ε_α

$$\varepsilon_\alpha = \frac{g}{p_b} > 1$$

CONTINUITÀ DELL'INGRANAMENTO

Dalle definizioni geometriche di g e p_b si ottiene:

$$g = \frac{1}{2} m \left[\sqrt{(z_1 + 2)^2 - (z_1 \cos(\alpha))^2} + \sqrt{(z_2 + 2)^2 - (z_2 \cos(\alpha))^2} - (z_1 + z_2) \cdot \operatorname{sen}(\alpha) \right]$$

$pb = \pi m \cos(\alpha)$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(z_1 + 2)^2 - (z_1 \cos(\alpha))^2} + \sqrt{(z_2 + 2)^2 - (z_2 \cos(\alpha))^2} - (z_1 + z_2) \cdot \operatorname{sen}(\alpha) \right]}{\pi \cos(\alpha)}$$

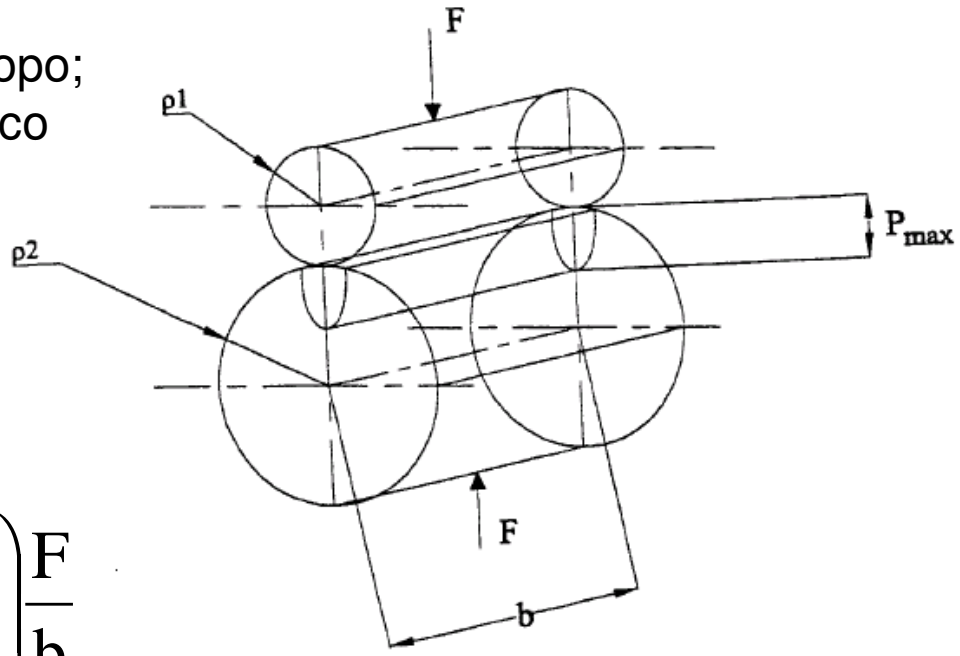
Come si vede questo fattore non dipende dal modulo.

DIMENSIONAMENTO A USURA

L'usura è la prima causa di messa fuori servizio per gli ingranaggi: il dimensionamento si esegue secondo le norme UNI 8862, basandosi sulla teoria di Hertz, per lo studio della pressione di contatto fra due cilindri.

Ipotesi:

1. il materiale dei cilindri sia omogeneo e isotropo;
2. si trovi in condizioni di comportamento elastico lineare;
3. mancanza di attrito;
4. forza uniformemente distribuita lungo la dimensione assiale



La pressione massima di contatto vale:

$$p_{max}^2 = \frac{1}{\pi\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1}+\frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)\frac{F}{b}$$

DIMENSIONAMENTO A USURA

Viste la caratteristica forma del dente, si ha che:

$\rho = r\,\mathrm{sen}(\alpha)$ $\qquad F_{bn} = \dfrac{F_t}{\cos(\alpha)}$

Dalla formula precedente, si ricava:

$$\sigma_{p,max} = p_{max} = \sqrt{\frac{1}{\pi\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1}+\frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)}}\sqrt{\left(\frac{1}{r_1\,\mathrm{sen}(\alpha)}+\frac{1}{r_2\,\mathrm{sen}(\alpha)}\right)}\sqrt{\frac{F_{bn}}{b}}$$

$$\sigma_{p,max} = p_{max} = \sqrt{\frac{1}{\pi\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1}+\frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)}}\sqrt{\frac{2}{\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\alpha)}}\sqrt{\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right)}\sqrt{\frac{F_t}{b}}$$

DIMENSIONAMENTO A USURA

Si trovano i primi coefficienti per il dimensionamento:

$$Z_E = \sqrt{\frac{1}{\pi\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1}+\frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)}}$$

fattore di elasticità = 189,812 per acciaio

$$Z_H = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\alpha)}}$$

fattore di zona = 2,495 se $\alpha = 20°$

Infine si trova la pressione di contatto reale per mezzo dei coefficienti correttivi:

$$\sigma_H = Z_\varepsilon \sqrt{K_A K_V}\, \sigma_{p,max}$$

DIMENSIONAMENTO A USURA

I coefficienti sono:

$$\sigma_H = Z_\varepsilon \sqrt{K_A K_V}\, \sigma_{p,max}$$

$$Z_\varepsilon = \sqrt{\frac{4-\varepsilon_\alpha}{3}}$$ Fattore del rapporto di condotta

K_A fattore di applicazione del carico per tenere conto dei sovraccarichi esterni

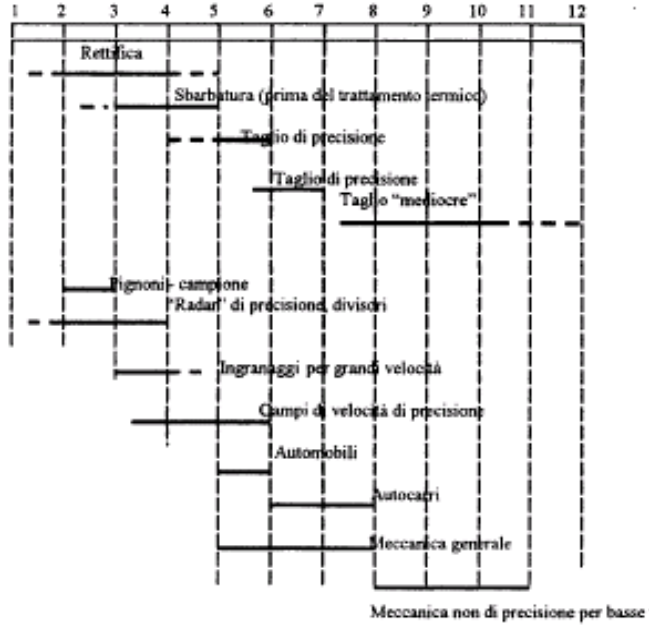
	Caratteristiche di funzionamento della macchina azionata		
Caratteristiche di funzionamento del motore	Uniforme	Sovraccarichi leggeri	Sovraccarichi Forti
	Valori orientativi di K_A * •		
Uniforme	1,0	1,25	1,75
Sovraccarchi leggeri	1,25	1,5	2,0 o più
Sovraccarichi forti	1,5	1,75	2,25 o più
* I valori indicati non sono validi per ingranaggi funzionanti a velocità prossime alle velocità di risonanza			
• Per ingranaggi moltiplicatori, moltiplicare i valori indicati per 1,1.			

DIMENSIONAMENTO A USURA

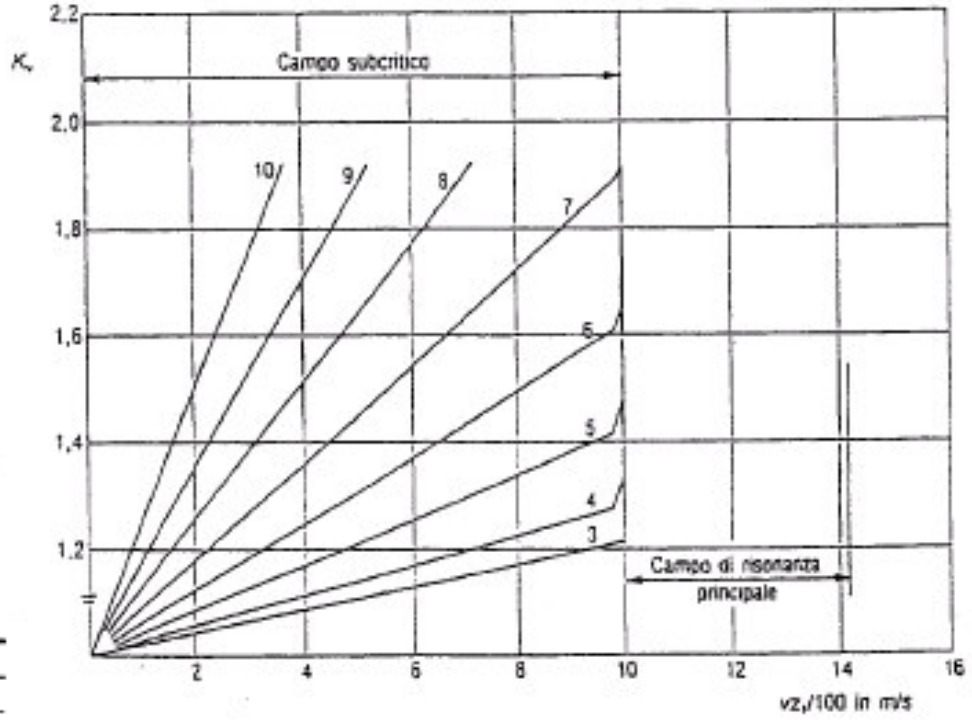
I coefficienti sono:

$$\sigma_H = Z_\varepsilon \sqrt{K_A K_V}\, \sigma_{p,max}$$

K_V fattore dinamico che dipende dalla qualità di lavorazione delle ruote dentate,e dalla velocità periferica della circonferenza primitiva



Velocità (m/s)	*Procedimento di lavorazione*
0.....0,8	Fusione, taglio alla fiamma, sgrossatura
0,8.....4	Lavorazione accurata ad asportazione di truciolo
4.....12	Lavorazione come sopra, molto accurata e rettifica normale
12.....60	Rettifica di precisione, rasatura dentature oblique



DIMENSIONAMENTO A USURA

Sostituendo nella formula $\sigma_H = Z_\varepsilon \sqrt{K_A K_V}\, \sigma_{p,max}$

le relazioni geometriche dei diametri primitivi e della larghezza di dentatura si ottiene

$$\sigma_H = Z_\varepsilon \sqrt{K_A K_V}\, Z_E Z_H \sqrt{\frac{F_t}{b}\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right)}$$

$$\sigma_H = Z_\varepsilon \sqrt{K_A K_V}\, Z_E Z_H \sqrt{\frac{2M_t}{mz_1}\frac{1}{\gamma m}\left(\frac{1}{mz_1}+\frac{1}{mz_2}\right)}$$

introducendo il rapporto di ingranaggio, u = z2/z1 si ha l'espressione dello sforzo massimo:

$$\sigma_H = Z_\varepsilon \sqrt{K_A K_V}\, Z_E Z_H \sqrt{\frac{2M_t}{\gamma m^3 z_1^2}\left(\frac{1+u}{u}\right)}$$

SFORZO DI CONFRONTO

È definito dalla normativa come:

$$\sigma_{HP} = \frac{\sigma_{H\,lim}}{S_{H\,min}} Z_W Z_L Z_R Z_X Z_V Z_N$$

σ_{Hlim} pressione limite di fatica superficiale, tabulata secondo il materiale di cui è costituita la ruota

s_{Hmin} coefficiente di sicurezza.

I coefficienti correttivi sono utilizzati per tener conto delle condizioni di funzionamento dell'ingranaggio.

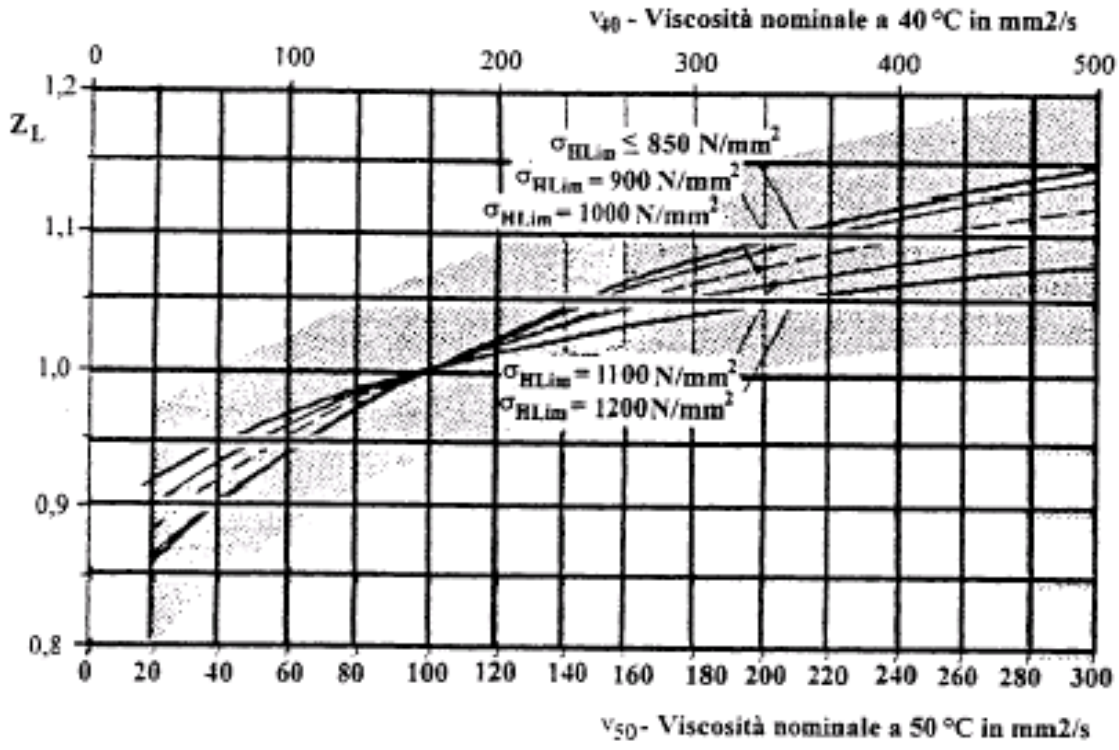
COEFFICIENTI CORRETTIVI

Z_W fattore di rapporto fra le durezze; $Z_W = 1{,}2 - \dfrac{HB - 130}{1700}$

HB è la durezza Brinell del materiale; se essa non è compresa fra 130 e 400 il fattore di durezza vale 1. Quindi esso è influente solo per la ruota di materiale più tenero, tipicamente la condotta.

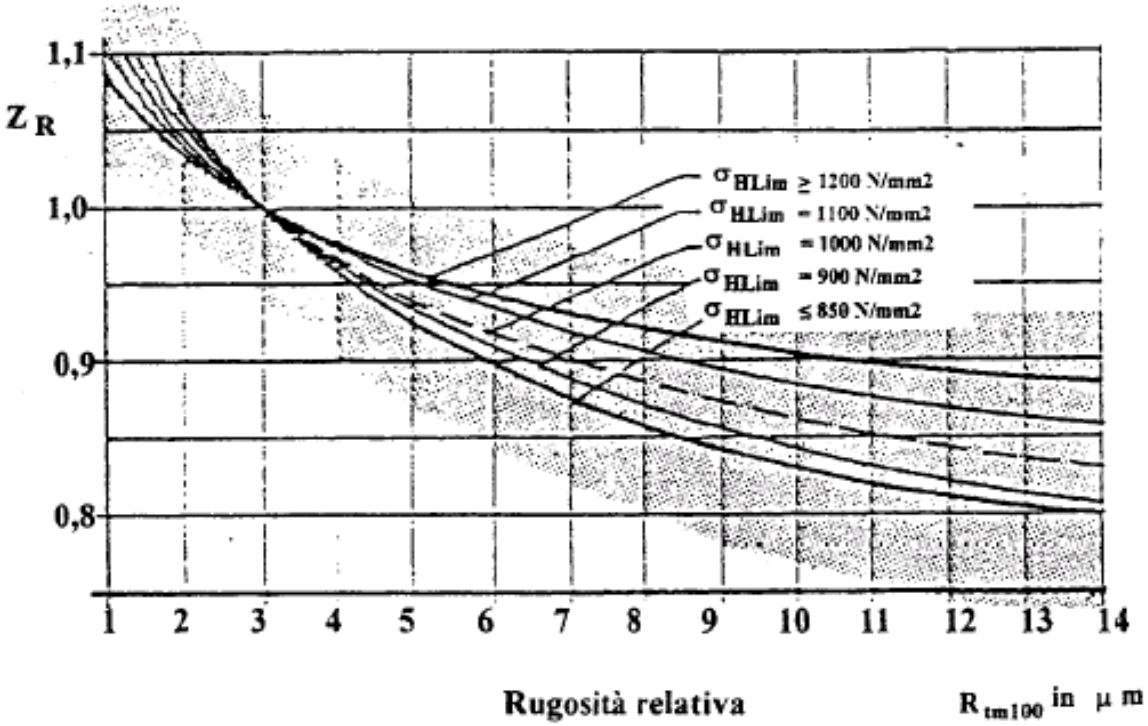
Z_L

fattore di lubrificazione; dipende dalla viscosità del lubrificante adoperato.



COEFFICIENTI CORRETTIVI

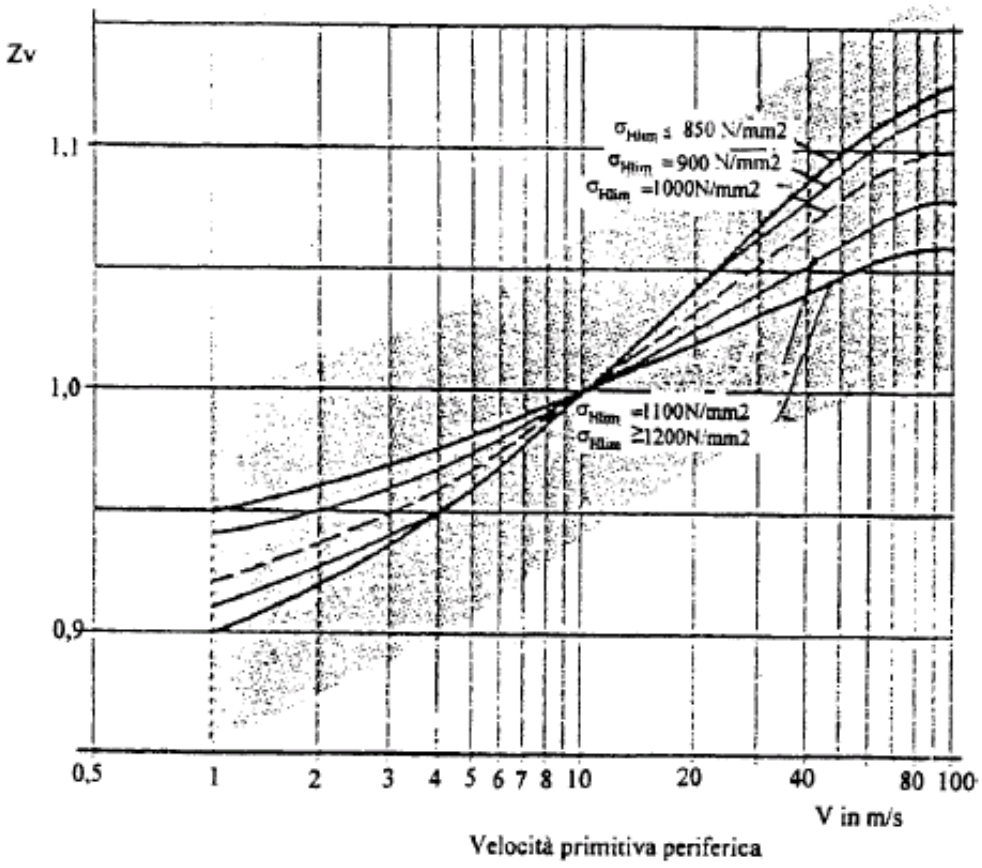
Z_R fattore di rugosità che è diagrammato secondo la rugosità totale media della dentatura



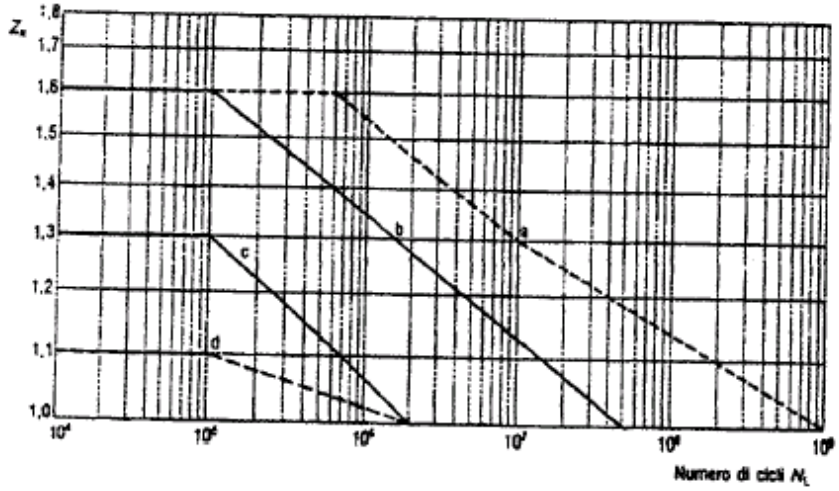
Z_X fattore dimensionale, che dipende dal materiale della ruota: si pone = 1 se la ruota è di acciaio trattato termicamente in modo corretto

COEFFICIENTI CORRETTIVI

Z_V fattore di velocità, che richiede un comportamento iterativo come il precedente fattore K_V , perché dipende dal diametro della ruota, e quindi dal modulo.



Z_N fattore di durata che è diverso da 1 solo se si richiede la durata “a termine” dell’ingranaggio



PROCEDIMENTO

1. Scegliere il numero di denti della motrice e della condotta in modo da soddisfare il rapporto di trasmissione, e modificarlo per prevenire difetti da ingranamento.
2. Verificare la bontà dell'ingranamento secondo la relazione

$$\varepsilon_\alpha = \frac{g}{p_b} > 1$$

3. Scegliere un valore del modulo di primo tentativo e dimensionare su quello il diametro primitivo, il passo, la larghezza della ruota. Note le velocità angolari si risale anche alle velocità periferiche da usare per i successivi coefficienti.

PROCEDIMENTO

4. Determinare il valore dei coefficienti compresi nella relazione per il valore di pressione massima locale secondo Hertz:

$$\sigma_H = Z_\varepsilon \sqrt{K_A K_V} Z_E Z_H \sqrt{\frac{2M_t}{\gamma m^3 z_1^2}\left(\frac{1+u}{u}\right)}$$

5. Determinare il valore dei coefficienti per ricavare il valore di pressione di confronto:

$$\sigma_{HP} = \frac{\sigma_{H\,lim}}{S_{H\,min}} Z_W Z_L Z_R Z_X Z_V Z_N$$

PROCEDIMENTO

6.Calcolare il valore minimo del modulo risolvendo la disequazione:

$$Z_\varepsilon \sqrt{K_A K_V} Z_E Z_H \sqrt{\frac{2M_t}{\gamma m^3 z_1^2}\left(\frac{1+u}{u}\right)} \le \frac{\sigma_{H\lim}}{s_{H\min}} Z_W Z_L Z_R Z_X Z_V Z_N$$

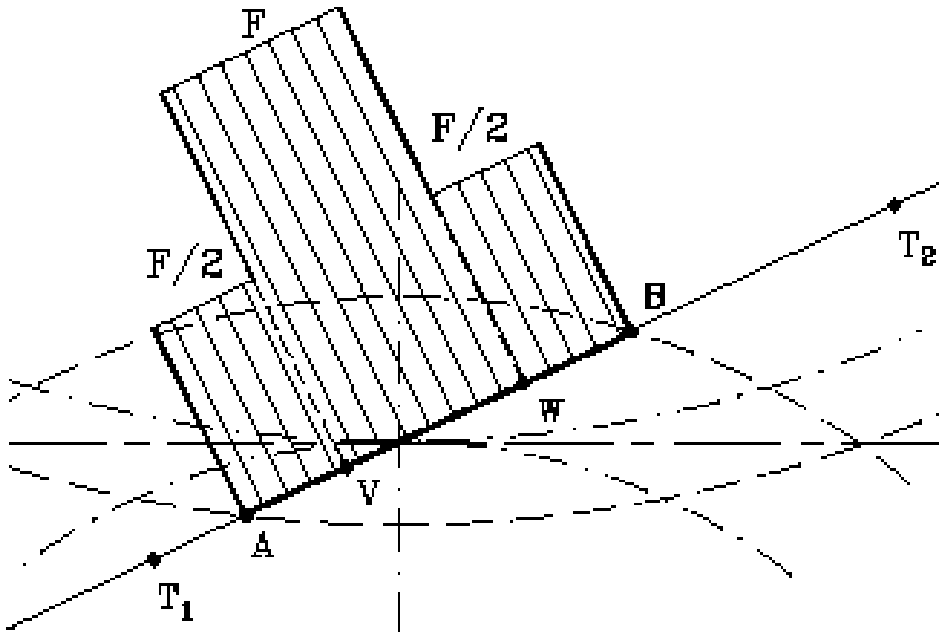
Da cui si ottiene il modulo minimo:

$$m \ge \sqrt[3]{\frac{2M_t(1+u)}{\gamma z_1^2 u} K_A K_V \left(\frac{Z_\varepsilon Z_E Z_H s_{H\min}}{\sigma_{H\lim} Z_W Z_L Z_R Z_X Z_V Z_N}\right)^2}$$

Si approssima per eccesso al valore normalizzato più prossimo e si ripete il calcolo fino a che non converge. Il procedimento si deve ripetere sia per il pignone che per la ruota.

VERIFICA A FATICA

- Il dente è sottoposto a sollecitazioni variabili nel tempo per effetto del movimento della ruota, rispetto alla retta delle pressioni su cui agisce la forza F_{bn}
- La forza stessa varia durante il movimento perché all'inizio e alla fine dell'ingranamento la forza si ripartisce sulle coppie di denti in presa: l'andamento della forza è

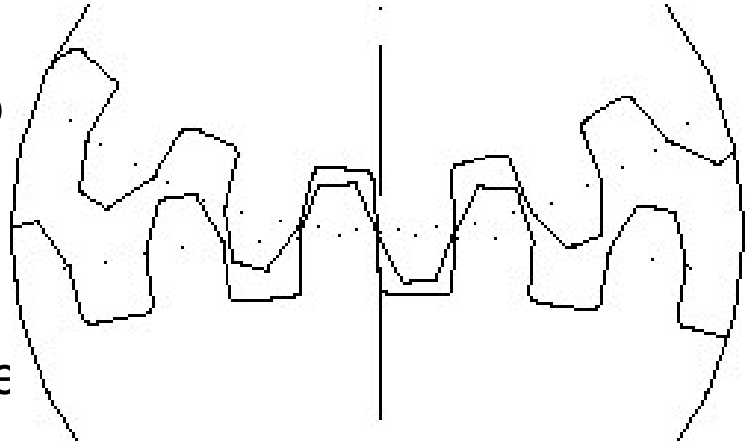


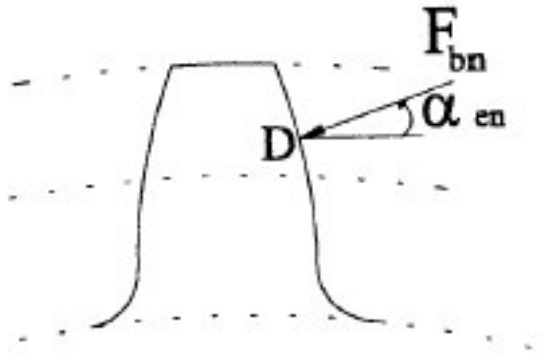
FORZE AGENTI SUL DENTE

Lo studio si compie nel punto di contatto singolo più esterno, in cui è massimo il prodotto della forza per il braccio rispetto alla base del dente.

La determinazione del punto di contatto si svolge in modo grafico, disegnando l'evolvente e disponendo le ruote in modo appropriato.

Si può anche misurare l'angolo che la forza forma con la normale all'asse del dente, che chiamiamo α_{en}





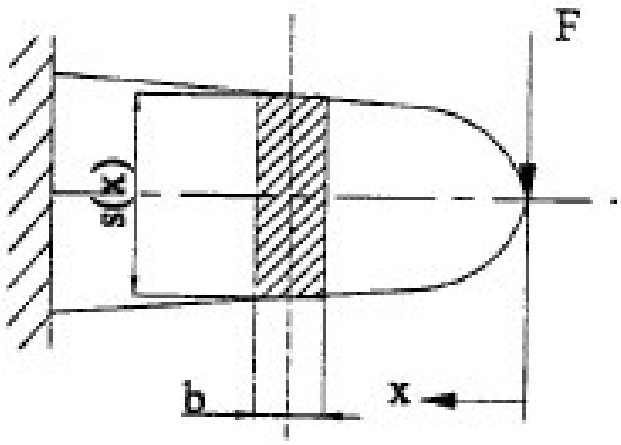
SEZIONE RESISTENTE

Per individuare la sezione resistente si ricorre al SOLIDO A UNIFORME RESISTENZA: date le condizioni di carico e i vincoli, è il solido che ha lo stesso sforzo massimo in tutte le sezioni perpendicolari all'asse.

Consideriamo una mensola incastrata con coordinata assiale x, il cui profilo sia definito dalla funzione s(x); se è sollecitata a flessione, per la definizione data prima, si ha:

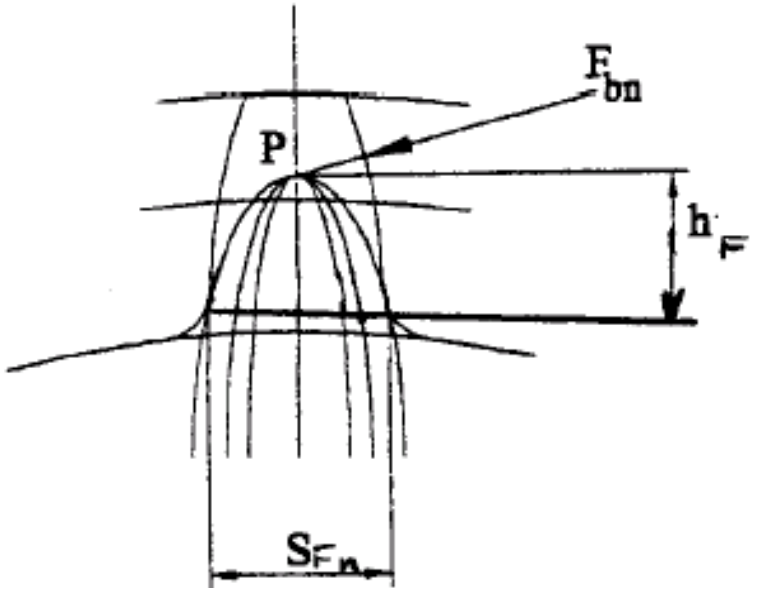
$$\sigma_{max} = \frac{M_f}{W_f} = \frac{F \cdot x}{\frac{1}{6} b \cdot s(x)^2} = k$$

$$s(x) \propto \sqrt{x}$$



SEZIONE RESISTENTE

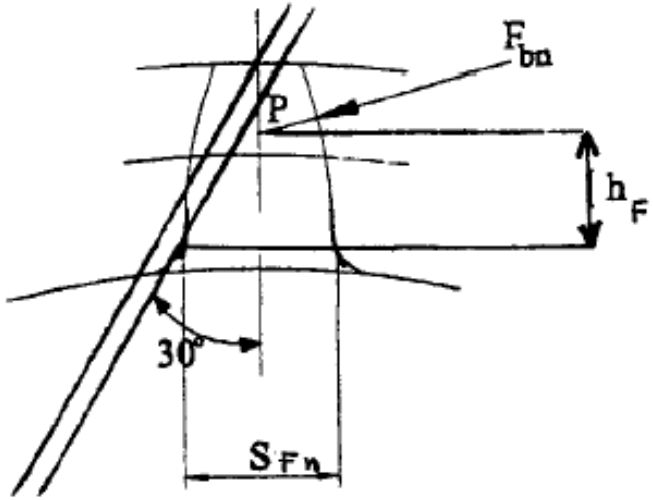
La sezione resistente è data dalla tangenza fra il profilo del dente e la famiglia di parabole con vertice all'intersezione fra la retta delle pressioni e l'asse del dente.



In alternativa si considerano le rette inclinate a 30° sull'asse; il punto di tangenza è ancora la sezione resistente, di cui si misurano:

La larghezza, s_{Fn}

Il braccio della forza, h_F



VERIFICA SECONDO NORMA

Il dente è sollecitato a flessione e compressione, quindi c'è un effetto di trazione; benché la compressione sia di entità superiore, si nota che il rischio maggiore è per la trazione, più prossima alle condizioni limite.

Si potrebbe svolgere il calcolo normalmente secondo la prassi per la verifica a fatica:

- Si disegna il diagramma di Haigh, considerando che i coefficienti riduttivi in questo caso sono ricavati direttamente per via sperimentale su ruote dentate;
- Si ricavano gli sforzi limite conoscendo lo sforzo alternato e medio del carico;
- Si esegue il confronto

$$\sigma_{max} \leq \frac{\sigma_{lim}}{\eta}$$

VERIFICA SECONDO NORMA

Tuttavia la norma prescrive che si esegua il confronto nella forma: $\sigma_F \leq \sigma_{FP}$

In cui con opportuni coefficienti si tiene conto delle condizioni dinamiche reali dell'ingranamento.

$$\sigma_F = \frac{F_t}{bm} Y_{Fa} Y_{Sa} Y_\varepsilon K_A K_V$$

F_t è la forza tangenziale agente sulla ruota.

b larghezza della dentatura

m modulo della dentatura

VERIFICA SECONDO NORMA

$$\sigma_F = \frac{F_t}{bm} Y_{Fa} Y_{Sa} Y_\varepsilon K_A K_V$$

Dalla relazione dello sforzo massimo, a flessione, si ricava:

$$\sigma_f = \frac{M_f}{W_f}$$

sostituendo i valori delle forze si ottiene:

$$\sigma_f = \frac{F_t \cdot \cos(\alpha_{en}) \cdot h_F}{\frac{1}{6} b \cdot s_{Fn}^{\,2}} = \frac{F_{bn}}{\cos(\alpha)} \frac{6\cos(\alpha_{en}) h_F}{b \cdot s_{Fn}^{\,2}} = \frac{F_{bn}}{b \cdot m} \frac{6\cos(\alpha_{en}) \frac{h_F}{m}}{\cos(\alpha) \left(\frac{s_{Fn}}{m}\right)^2}$$

$$Y_{Fa} = \frac{6\cos(\alpha_{en}) \frac{h_F}{m}}{\cos(\alpha) \left(\frac{s_{Fn}}{m}\right)^2}$$

Y_{Fa} dipende esclusivamente dalle dimensioni della dentatura e dalle condizioni di funzionamento. È calcolato considerando solo lo sforzo di trazione (conservativo).

$\sigma_F = \frac{F_t}{bm} Y_{Fa} Y_{Sa} Y_\varepsilon K_A K_V$ VERIFICA SECONDO NORMA

Y_{Sa} è il fattore di correzione delle tensioni, che equivale nella pratica al coefficiente di sovrasollecitazione teorico Kt; tiene conto dell'effetto di intaglio alla base del dente.

$$Y_{Sa} = (1{,}2 + 0{,}13 \cdot L) q_s^{\frac{1}{\left(1{,}21 + \frac{2{,}3}{L}\right)}} \qquad L = \frac{s_{Fn}}{h_F} \qquad q_s = \frac{s_{Fn}}{2\rho_F}$$

ρ_F è il raccordo alla base del dente, pari a 0,2·m

Yε è il fattore di ricoprimento. Se si svolge il calcolo nel punto di contatto singolo più esterno vale 1; se si esegue invece, secondo la normativa, con la forza in testa al dente e inclinata di α_{an}, vale

$$Y_\varepsilon = 0{,}25 + \frac{0{,}75}{\varepsilon_\alpha}$$ in cui εα è il rapporto di condotta definito sopra

K_A è il fattore di servizio, già visto in precedenza;
K_V è il fattore di velocità, anch'esso già visto.

VERIFICA SECONDO NORMA

La tensione ammissibile con la quale si esegue il confronto è espressa da:

$$\sigma_{FP} = \frac{\sigma_{Flim}}{S_{Fmin}} Y_{\delta relT} Y_{RrelT} Y_X Y_{ST} Y_{NT}$$

in cui:

σ_{Flim} è lo sforzo limite di fatica, tabulato.

s_{Fmin} è il coefficiente di sicurezza.

$Y_{\delta relT}$ è il coefficiente relativo di sensibilità all'intaglio, che si ottiene dalla relazione:

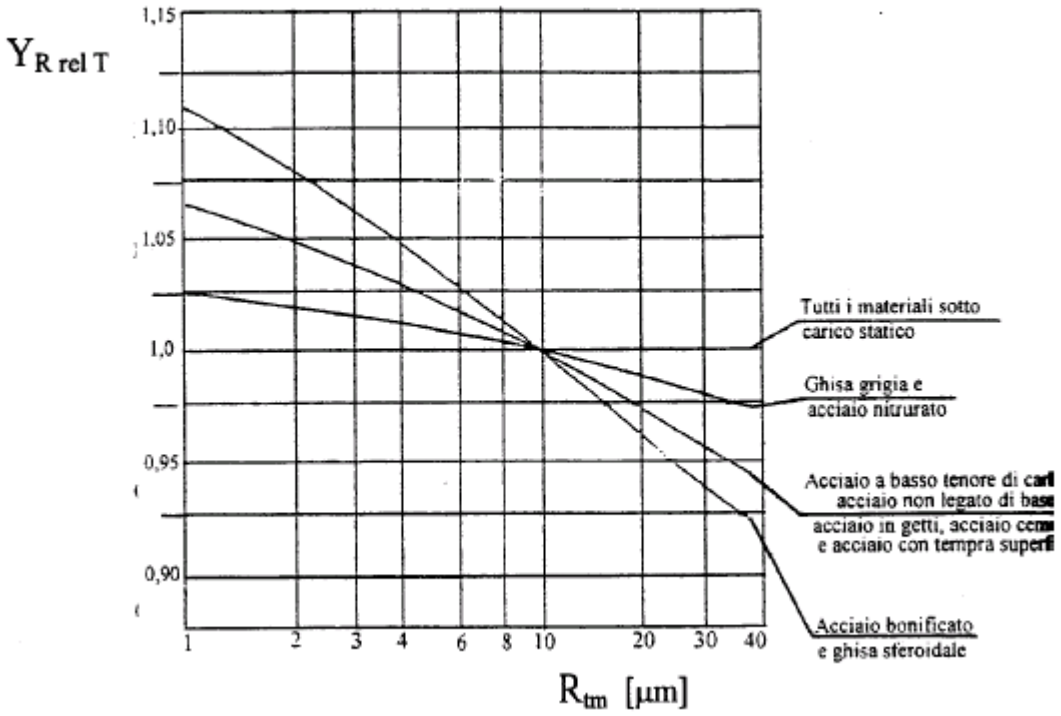
$$Y_{\delta relT} = \frac{1+\sqrt{0{,}2\cdot(1+2q_s)\rho'}}{1+\sqrt{1{,}2\rho'}}$$

Materiale		Coefficiente ρ'
Ghisa grigia con carico di rottura a trazione R_m, in N/mm², di	150	0.3124
	300	0.3095
Acciaio nitrurato		0.1005
Acciaio a basso tenore di carbonio, acciaio non legato di base, acciaio per getti, con carico unitario di snervamento superiore R_{eH}, in N/mm$_2$, di	300	0.0833
	400	0.0445
Acciaio bonificato e ghisa sferoidale, con carico unitario di scostamento della proporzionalità $R_{p0,2}$, in N/mm², di	500	0.0281
	600	0.0194
	800	0.0064
	1000	0.0014
Acciaio cementato		0.0030

VERIFICA SECONDO NORMA

$$\sigma_{FP} = \frac{\sigma_{Flim}}{S_{Fmin}} Y_{\delta relT} Y_{RrelT} Y_X Y_{ST} Y_{NT}$$

Y_{RrelT} è il coefficiente relativo di rugosità superficiale, diagrammato o ricavabile con apposite formule dipendenti dal materiale di cui sono costituite le ruote. È detto relativo perché vale 1 se le ruote reali hanno subito la stessa lavorazione delle ruote sperimentali sulle quali si ricavano i coefficienti.



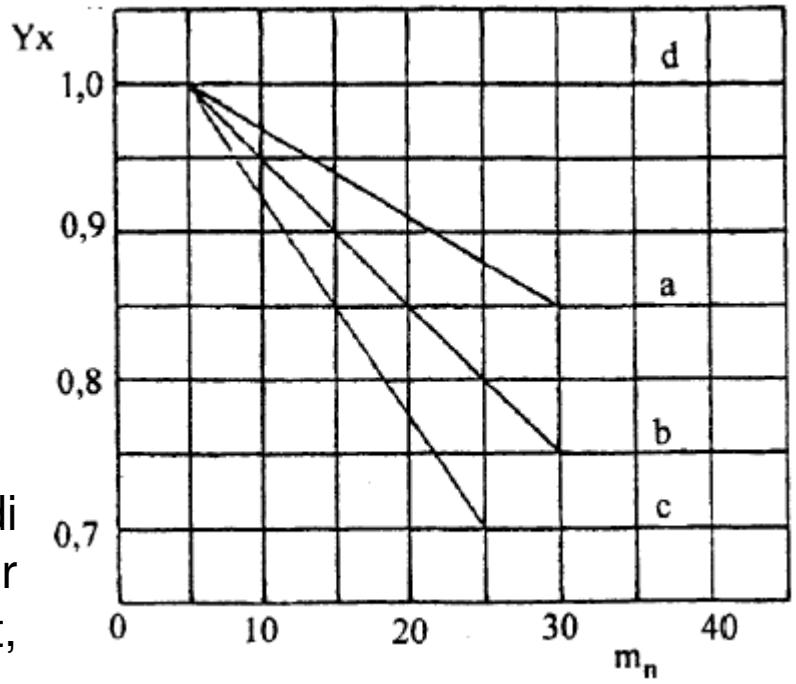
VERIFICA SECONDO NORMA

$$\sigma_{FP} = \frac{\sigma_{Flim}}{s_{Fmin}} Y_{\delta relT} Y_{RrelT} Y_X Y_{ST} Y_{NT}$$

Y_X è il coefficiente dimensionale, che considera l'effetto del modulo del dente (come b_2 nei normali dimensionamenti a fatica).

Y_{ST} è il coefficiente di correzione delle tensioni assoluto: poiché le tabelle normative danno i valori limite di sforzo in termini di ampiezza, mentre noi ci basiamo sul valore massimo, Y_{ST} vale 2.

Y_{NT} è il coefficiente di durata, che permette di considerare una maggiore resistenza delle ruote per durate inferiori a quelle sulle quali si eseguono i test, 3.000.000 cicli.



Si deve quindi semplicemente eseguire il confronto:

$$\frac{F_t}{bm} Y_{Fa} Y_{Sa} Y_\varepsilon K_A K_V \le \frac{\sigma_{Flim}}{s_{Fmin}} Y_{\delta relT} Y_{RrelT} Y_X Y_{ST} Y_{NT}$$